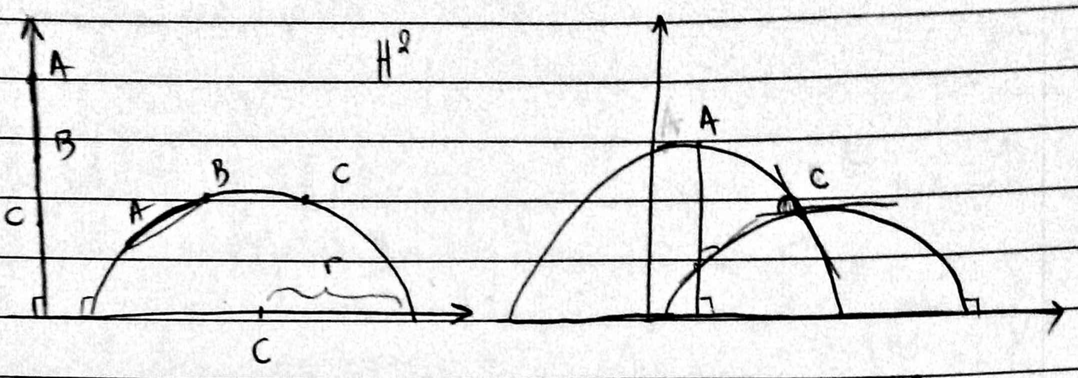
Έστω d συνάρ. $d: H^2 \times H^2 \to \mathbb{R}^+$ κ' έστω δύο σημεία A, B του H^2
τότε $d(A,B) = ;$

$d(A,B) + d(B,C) = d(A,C)$



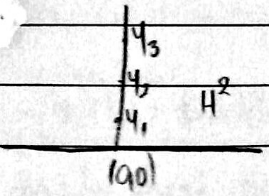
(*) Το κέντρο των ισομετριών βρίσκεται πάνω στο άξονα x

Απόλυτη Απόσταση: $d: H^2 \times H^2 \to \mathbb{R}^+$, $A, B \in H^2$: $(A,B) \to d(A,B)$

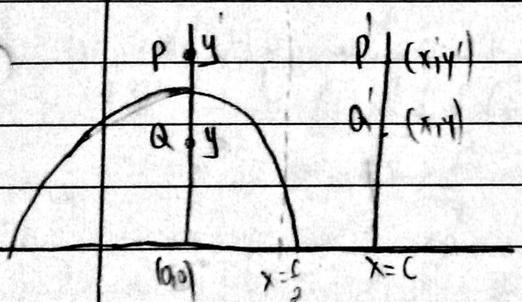
i) $\forall f$ ισομετρία στο H^2: $d(f(Q), f(P)) = d(P,Q)$ $\forall (P,Q) \in H^2$

ii) $d((0,y_1),(0,y_2)) + d((0,y_2),(0,y_3)) = d((0,y_1),(0,y_3))$

για $y_1 < y_2 < y_3$



iii) $d: H^2 \times H^2 \to \mathbb{R}^+$ συνεχής.



$; : d((0,y),(0,y')) \stackrel{?}{=} d((0,y'),(0,y))$

$0 < y < y'$

$f: H^2 \to H^2$ $\quad \exists r: y < r < y'$ $\quad f(Q) = P$ (αντιστροφή) $\quad r = ;$

$f(Q) = f(0,y) = (0,z)$

$|(0,z)||(0,y)| = r^2$

$yz = r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{yy'}$

$f \circ f = I_{H^2}$

$d(P,Q) = d(f(P), f(Q)) = d(Q,P)$

συνάρ. $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$f_1(y,y') = d((0,y),(0,y'))$ (1)	ισχύει ότι: $f_1(y,y') = f_1(\lambda y, \lambda y')$ $\forall \lambda > 0$, $\forall y, y' > 0$
$y, y' > 0$ & $y < y'$	(1) $= d((0,\lambda y),(0,\lambda y'))$

* ισχύει ως ομοιοθεσία με $K(0,0)$ κ' λόγο λ

• Δνα $f((0,y)) = (0,\lambda y)$

$f((0,y')) = (0,\lambda y')$

$d((0,y),(0,y')) = d(f(0,y), f(0,y'))$ (i)

• $f_1(y,y') = f_1(\lambda y, \lambda y')$, $f_1(y,y') = f_1(y',y)$ (2)

• Για $y,y'>0$ & $0<y<y'$ $f_1(y,y') = f_1(y(1,\frac{y'}{y})) \overset{①}{=} f_1(1,t) = ;$

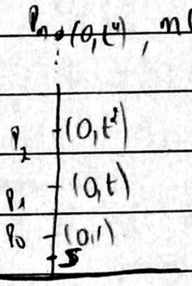
$\frac{y'}{y} = t(y,y') = t$

$d(P,Q) = f_1(1,t) = g(t)$ $\quad 0<t$

$P=(0,1)$

$Q=(0,t)$

για $t>1$



$d(P_0,P_n) \overset{\text{επειδή}}{=} d(P_0,P_1)+d(P_1,P_2)+\dots+d(P_{n-1},P_n)$

$f_1(1,t^n) = f_1(1,t)+f_1(1,t^2)+\dots+f_1(t^{n-1},t^n)$

Δνα δο $g(t^n) = g(t)+g(t)+\dots+g(t) = ng(t)$, g: συνεχής $g(0,+\infty)\to(0,+\infty)$

$= f_1(1,t)+f_1(1,t)+\dots+f_1(1,t)$, Αποδ. $\forall t>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

θυμήσου την λογαριθμική συν/ση

ΛΗΜΜΑ: $g:[1,\infty)\to[0,+\infty)$, g: συνεχής, $\forall t\geq 1$, τ.ω $g(t^x) = xg(t)$, $\forall x>0$

$\Longrightarrow g(t) = k\ln(t)$, $k\in\mathbb{R}^+$

Εχουμε ότι: $g(t) = f_1(1,t)$

① $g(t^n) = ng(t)$, $\forall t>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \boxed{g(t^{p/q}) = \frac{p}{q} g(t)}$ ② $\Leftrightarrow q\, g[(t^{1/q})^p] = p\, g(t) \Leftrightarrow qp\, g(t^{1/q}) = p\, g(t)$

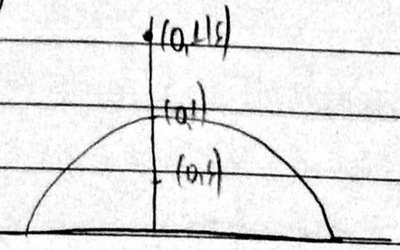
Δνα αρκεί δο $q\, g(t^{1/q}) = g(t)$ (ισχύει)

γιατί $g(t) = g[(t^{1/q})^q] = q\, g(t^{1/q})$

$g(t^x) = xg(t)$, $\forall x>0$, σε περίπτωση που x: άρρητος (χρησιμοποιούμε την ιδιότητα ότι το όριο της ακ. $\frac{p_n}{q_n}\to x$ άρρητος κτλ)

Άρα, $g(t) = f_1(1,t) = d((0,1),(0,t)) = k\ln(t)$, $k = g(e)$, $e>1$

$g(s) = \ell_1(1,s) = \ell_1(s,1)$



$0 < s < 1$

$1 < \frac{1}{s}$

Έστω f: αντιστροφή ως προς το 1 κ' $x^2+y^2=1$, $y>0$

$f(P) = Q \qquad g(Q) = P$

$g(s) = d((0,1),(0,s)) = d(f(0,1), f(0,s)) = d((0,1),(0,1/s))$

$= g(1/s)$

$= k\ln(1/s)$

Άρα, βρήκαμε ότι: $g(t) = k\ln t$, $t \geq 1$

$= k\ln\frac{1}{t}$, $t < 1$

$0 < t$

όπου $g(t) = \ell_1((0,1),(0,t))$

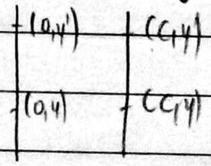
Άρα, δ.ο. $g(t) = \ell_1(1,t) = d((0,1),(0,t))$, το οποίο μπορεί να γραφτεί σε μορφή:

$g(t) = k|\ln(t)| \geq 0$

$t<1 \quad \ln\frac{1}{t} = \ln t^{-1} = -\ln t = |\ln t|$, $\ln t > 0$

$d((0,y),(0,y')) = \ell_1(y,y') = \ell_1(g(1, y'/y)) = \ell_1(1, y'/y)$

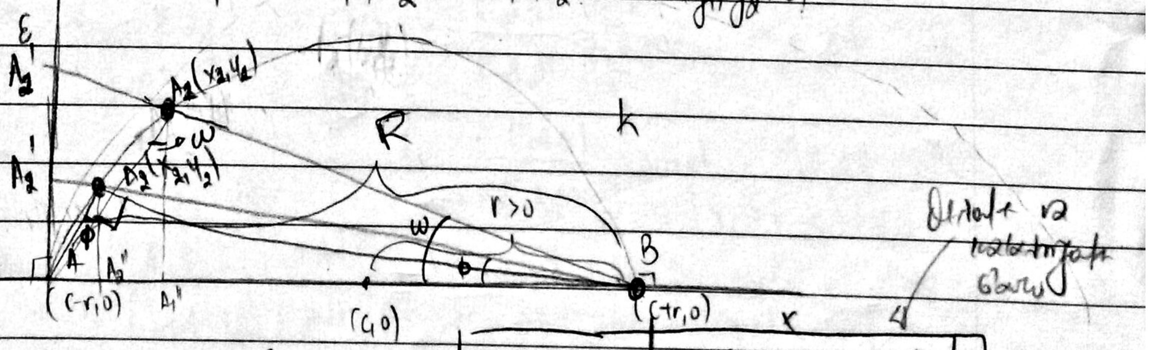
$= g(y'/y) = k|\ln(y'/y)|$



(*) Οι 2ου τύπου ευθείες είναι οριακά οι πρώτου τύπου ευθείες

(III) Υπερβολική Απόσταση σε γενική περίπτωση

Έστω δύο σημεία A_1, A_2 $(x_1 \neq x_2)$ & $(y_1, y_2 > 0)$



Θα θεωρούμε $k = 1$ (συνήθως)

$$\boxed{d(A_1, A_2) = k\left|\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\cdot\left|\frac{x_1-r-c}{x_2-r-c}\right|\right)\right|}$$

Θα βρούμε κάποιους εύχρηστους τύπους (χωρίς απόδειξη) προβάλλαμε το ημικύκλιο, έστω μια αντιστροφή f, έτσι ώστε $f(K)=\varepsilon$ αντ. $K_1(B, R=AB)$

όλος ο κύκλος $\subseteq \mathbb{R}^2$ $f(K')$ ευθεία. Έστω $\varepsilon' \subseteq \mathbb{R}^2$

$A \in K' \Rightarrow f(A) \in f(K') = \varepsilon'$ & $A \in K_1 \Rightarrow f(A) = A \in \varepsilon'$

$$\left.\begin{array}{l} Ox' \perp K' \\ f(Ox) \perp f(K') = \varepsilon' \\ Ox \perp \varepsilon'' \end{array}\right\} \text{Άρα } \underline{f(K)=\varepsilon}$$

• Προβάλλαμε το A_2 στο A_2'' & το A_1 στο A_1''

$\overset{\Delta}{ABA_1}$ $\tan\omega = \dfrac{|AA_2'|}{|AB|}$

$\overset{\Delta}{ABA_2'}$ $\tan\phi = \dfrac{|AA_1'|}{|AB|}$

δεν έχει σημασία η θέση αφού υπάρχει το απόλυτο

$d(A_1,A_2) = d(f(A), f(B)) = d(A_1', A_2') = k\left|\ln\left(\dfrac{AA_2'}{AA_1'}\right)\right|$

$f(A_1) = A_1'$

$f(A_2) = A_2'$

?

Στο $\overset{\Delta}{BAA_2''}$: $\tan\omega = \dfrac{|A_1''A_1|}{|A_1''B|} = \dfrac{|AA_1'|}{|AB|}$

Στο $\overset{\Delta}{BAA_1''}$ $\tan\phi = \dfrac{|A_2''A_2|}{|A_2''B|} = \dfrac{|AA_2'|}{|AB|}$ X

$$\left.\begin{array}{l} \text{Στο } AA_2A_2'' \quad \tan\phi = \dfrac{|AA_2''|}{|A_2A_2''|} \\ \text{Στο } AA_1A_1'' \quad \tan\omega = \dfrac{|AA_1''|}{|A_1A_1''|} \end{array}\right\} \text{(1)}$$

$$\frac{|AA_2'|}{|AA_1'|} = \frac{\tan\omega}{\tan\phi} = \frac{|AA_1''|/|A_1A_1''|}{|AA_2''|/|A_2A_2''|} = \underbrace{\left(\frac{|AA_1''|}{|AA_2''|}\right)}_{=\Gamma_1}\cdot\underbrace{\left(\frac{|A_2A_2''|}{|AA_1''|}\right)}_{=\Gamma_2} = \Gamma_1\Gamma_2 \quad (3)$$

$\Gamma_2 = \dfrac{|A_2A_2''|}{|A_1A_1''|}$ (2)

Στο BAA_2'': $\tan\phi = \dfrac{|A_2A_2''|}{|A_2''B|}$

Στο $\vec{B}A_1''A_1$: $\tan\omega = \dfrac{|A_1A_1''|}{|A_1''B|}$

$$(2) = \frac{\tan\phi\,|A_2''B|}{\tan\omega\,|A_1''B|}$$

$$(3) = \frac{|AA_1''|}{|AA_2''|}\,\frac{\tan\phi}{\tan\omega}\,\frac{|A_2''B|}{|A_2''B|} \Rightarrow \left(\frac{\tan\omega}{\tan\phi}\right)^2 = \frac{|AA_1''|}{|AA_2''|}\,\frac{|BA_2''|}{|BA_1''|}$$

Δηλ. $d(A_1,A_2) = k\left|\ln\left|\dfrac{\tan\omega}{\tan\phi}\right|\right|$ & $d(A_1,A_2) = \dfrac{k}{4}\left|\ln\left(\dfrac{|AA_1''|^2\,|BA_2''|^2}{|AA_2''|^2\,|BA_1''|^2}\right)\right|$ (4)

$|AA_1''|^2 = (x_1-c+r)^2$ $\quad |AA_2''|^2 = (x_2-c+r)^2$ $\quad |BA_1''|^2 = (x_1-c-r)^2$

$|BA_2''|^2 = (x_2-c-r)^2$

$A(c-r,0)$

$B(c+r,0)$

$A_1''(x_1,0)$

$A_2''(x_2,0)$

y_2 / y_1

Άρα (4) $= d(A_1,A_2) = \dfrac{k}{4}\left|\ln\left(\dfrac{(x_1-c+r)^2(x_2-c-r)^2}{(x_2-c+r)^2(x_1-c-r)^2}\right)\right| = \dfrac{k}{2}\ln\left|\dfrac{|x_1-c-r|\;|x_2-c+r|}{|x_2-c-r|\;|x_1-c+r|}\right|$

Όμως: $(x_1-c)^2+y_1^2=r^2$ (1')

$(x_2-c)^2+y_2^2=r^2$ (2')

(1') $\Rightarrow y_1^2 = r^2-(x_1-c)^2 = (r-x_1+c)(r+x_1-c) = -(x_1+r-c)(x_1-r-c)$

$y_2^2 = \ldots = -(x_2+r-c)(x_2-r-c)$

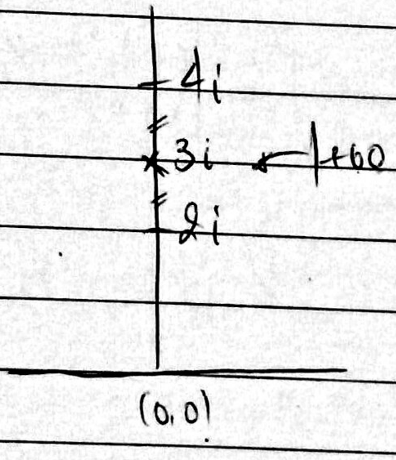
Το $\left|\dfrac{x_2-c+r}{x_1-c+r}\right| = \dfrac{y_2^2}{y_1^2}\left|\dfrac{x_2-r-c}{x_1-r-c}\right|$ / Άρα, έχουν κάπου λάθος!!!

Άλλος τρόπος

$$\frac{\tan\omega}{\tan\varphi} = \frac{|A_1A_1''|}{|A_1''B|} \Big/ \frac{|A_2A_2''|}{|BA_2''|} = \frac{y_1}{y_2}\left|\frac{x_2-c-r}{x_1-c-r}\right|$$ Αποδείχθηκε!

Άρα,
$$\boxed{d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) = k\left|\ln\left|\frac{y_2}{y_1}\cdot\frac{(x_1-r-c)}{(x_2-r-c)}\right|\right|}$$

Σχόλια:



Αλλά το μέσο με την υπερβολική είναι διαφορετικό.